Final Nacional
XXXVII Olimpíada Nacional de Matemática – 2022
Nivel IV

Tiempo máximo: 4 horas
No se puede usar calculadora
No se pueden consultar libros ni apuntes

Montevideo, 23 de octubre de 2022.-

Problema 1.-
Para embaldosar un patio cuadrado de lado n (n entero positivo) se dispone de dos tipos de baldosas, cuadradas de 5×5 y rectangulares de 1×3.
Determinar todos los valores de n para los cuales es posible hacerlo.

Nota: El patio debe quedar totalmente cubierto sin que las baldosas se superpongan.

Problema 2.-
Hallar todos los números de cuatro cifras, de la forma $\overline{aabb}$, que son cuadrados perfectos.

Problema 3.-
Sea ABC un triángulo con $AB < AC < BC$.
D es el punto medio del arco menor AB de la circunferencia circunscripta al triángulo ABC.
La recta AD corta a la recta BC en el punto E y la circunferencia circunscripta al triángulo BDE vuelve a cortar a la recta AB en el punto Z. La circunferencia circunscripta al triángulo ADZ vuelve a cortar a la recta AC en el punto H.
Probar que los segmentos BE y AH son iguales.

Problema 4.-
Hallar todos los posibles números reales k para los cuales las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - x + k$ son tres números enteros.

JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS

Colabora: UM Universidad de Montevideo Declarado de interés por: Ministerio de Desarrollo Social – Instituto Nacional de la Juventud