

Com – Partida de Matemática del Uruguay
Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas
Centro Latinoamericano de Matemática e Informática – CLAMI

XXXI Olimpiada Nacional de Matemática – 2016
Instancia Final
Nivel V

Tiempo máximo: 4 horas
No se puede usar calculadora
No se pueden consultar libros ni apuntes

Montevideo, 16 de Octubre de 2016.-

PROBLEMA 1

Se considera el polinomio $P(x) = x^3 + ax + b$ con a y b enteros.
Sabido que existen dos números enteros y, z para los cuales $P(y) - P(z)$ es múltiplo de 3 pero no de 9, demostrar que el coeficiente a no es múltiplo de 3.

PROBLEMA 2

Sea ABC un triángulo isósceles con $AC = AB$ y sean X, Y, Z los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA, AB respectivamente.
Si CZ corta al incírculo en L y Z y YL corta a BC en M , demostrar que $XM = MC$.

PROBLEMA 3

Sea n un número entero positivo.
Demostrar que n divide a $C_m^n \forall m = 1, \dots, n - 1$ si y sólo si n es un número primo.

PROBLEMA 4

Consideramos 2016 polinomios de grado 4 tales que todas sus raíces y su coeficiente principal pertenecen al conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Hallar el máximo número de veces que es posible asegurar que fue considerado un mismo polinomio.

JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS