

Com – Partida de Matemática del Uruguay
Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas
Centro Latinoamericano de Matemática e Informática – CLAMI

Instancia Final XXX Olimpiada Nacional de Matemática – 2015
Nivel V

Tiempo máximo: 4 horas
No se puede usar calculadora
No se pueden consultar libros ni apuntes

25 de octubre de 2015

PROBLEMA 1

Ana y Beto están jugando con un dado de seis caras, de manera que cada vez que tiran el dado anotan en el pizarrón el promedio de todas las tiradas hasta ese momento.

Por ejemplo, si inicialmente los números que dio el dado fueron 1, 4, 3, 4, 2, 6, ..., en el pizarrón están anotados:

$$\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \frac{1+4+3}{3} = \frac{8}{3}, \frac{1+4+3+4}{4} = 3$$

Después de varias horas de jugar, se les acabó el espacio del pizarrón y borraron todos los números, quedando los últimos tres promedios que anotaron: $\frac{196}{61}, \frac{172}{53}, \frac{211}{65}$.

Halla cuántas veces tiraron el dado, cuál fue el último número que salió, y demuestra que la solución hallada es única.

PROBLEMA 2

Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H , tal que $\angle BAC = 60^\circ$, $AB > AC$. Sean también: BE y CF las alturas relativas a los lados CA y AB respectivamente, y K , punto sobre el segmento BE , tal que $BK = CH$.

Determina el valor de $\frac{HK}{HO}$

PROBLEMA 3

Un cuadrado de 9×9 está dividido en 81 casillas de 1×1 .

Pintamos de negro 8 de esas casillas y el resto permanecen blancas.

Dentro del cuadrado, recortamos un rectángulo (podría ser, en particular, un cuadrado) completamente blanco. Ese corte se puede hacer solamente siguiendo las líneas de la grilla.

¿Cuál es la máxima área que puede tener dicho rectángulo independientemente de las posiciones de los cuadrados negros?

PROBLEMA 4

Sea $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ una función, con las siguientes propiedades:

- i) $f(1) = 0$
- ii) $f(p) = 1$ para todos los primos p
- iii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ para todos los x, y enteros positivos

Determina el menor $n \geq 2015$ que verifica: $f(n) = n$.

Nota: \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los enteros positivos.

JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS

Próximamente haremos seminarios, infórmate en nuestra web.
¡También puedes unirte a nuestro grupo de Facebook!