



# Olimpiada Nacional de Matemática

Problemas Semanales

Semana 4 - Abril 2020

# Índice

<b>1. Problemas Semanales</b>	<b>2</b>
<b>2. Primaria</b>	<b>3</b>
2.1. Nivel IA . . . . .	3
2.2. Nivel IB . . . . .	3
2.3. Nivel IC . . . . .	3
<b>3. Secundaria</b>	<b>5</b>
3.1. Nivel II . . . . .	5
3.2. Nivel III . . . . .	5
3.3. Nivel IV . . . . .	6
3.4. Nivel V . . . . .	6
<b>4. Pistas</b>	<b>7</b>
4.1. Pistas: Nivel IA . . . . .	7
4.2. Pistas: Nivel IB . . . . .	7
4.3. Pistas: Nivel IC . . . . .	7
4.4. Pistas: Nivel II . . . . .	7
4.5. Pistas: Nivel III . . . . .	7
4.6. Pistas: Nivel IV . . . . .	8
4.7. Pistas: Nivel V . . . . .	8

# 1. Problemas Semanales

Los problemas del presente archivo buscan servir de guía para practicar y entrenar a los alumnos que estén comenzando su trayecto en la resolución de problemas matemáticos.

Los niveles de la Olimpiada Nacional de Matemática son los siguientes:

- 1) Nivel IA - 4° de escuela
- 2) Nivel IB - 5° de escuela
- 3) Nivel IC - 6° de escuela
- 4) Nivel II - 1° de liceo
- 5) Nivel III - 2° y 3° de liceo
- 6) Nivel IV - 4° y 5° de liceo
- 7) Nivel V - 6° año de liceo

Te sugerimos que antes de resolver el problema de tú nivel, trabajes con el problema del nivel anterior (lo cual te servirá como repaso) y luego de tener la solución de tú nivel aceptes el desafío de intentar trabajar con el problema del nivel siguiente.

## 2. Primaria

### 2.1. Nivel IA

Juan está preparando paquetes como el de la figura para regalarle a 6 de sus amigos.

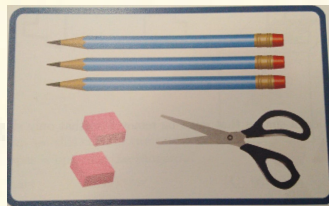


Figura 1: Materiales

Tiene 16 lápices, 12 gomas y 5 tijeras.

¿Cuántos útiles más es necesario que compre Juan para poder armar los 6 paquetes?

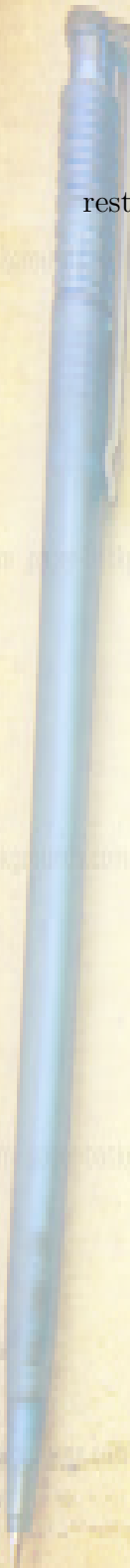
### 2.2. Nivel IB

Ana tiene en una bolsa muchas bolitas de 5 colores diferentes.

¿Cuántas bolitas debe sacar Ana de la bolsa, sin mirar, si quiere estar segura de sacar 50 bolitas de un mismo color?

### 2.3. Nivel IC

En el centro de una ciudad hay 10 edificios tales que el promedio de sus alturas es 20m.



Si no consideramos el edificio más alto, el promedio de las alturas de los restantes edificios es 18 metros.

¿Cuál es la altura del edificio más alto?

### 3. Secundaria

#### 3.1. Nivel II

En el triángulo  $ABC$ , rectángulo en  $C$ ,  $D$  y  $E$  son los puntos medios de los lados  $BC$  y  $AB$  respectivamente.

Prueba que los triángulos  $BEC$  y  $CEA$  tienen igual área.

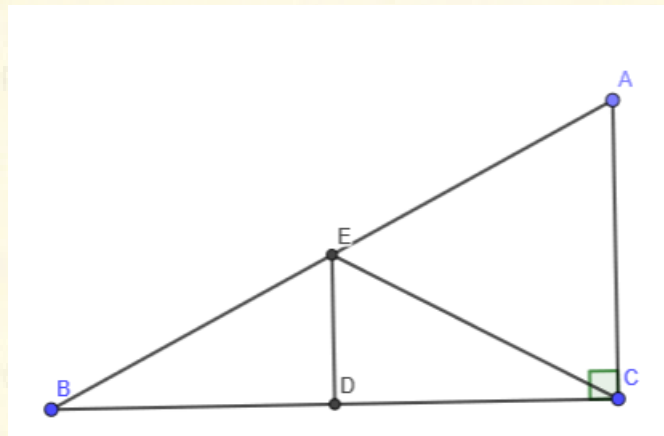


Figura 2: Problema Nivel II

#### 3.2. Nivel III

Arriba de una mesa hay 11 vasos; todos están puestos *boca arriba*.

Un movimiento válido consiste en dar vuelta dos vasos cualesquiera.

¿Es posible que, luego de una cierta cantidad de movimientos válidos, todos los vasos queden *boca abajo*?

### 3.3. Nivel IV

Prueba que el número  $3^{2n} - 2^n$  es un múltiplo de 7, cualquiera sea el número natural  $n$ .

### 3.4. Nivel V

Prueba que la igualdad

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

se verifica cualquiera sea el número natural  $n$  diferente de 0.

## **4. Pistas**

### **4.1. Pistas: Nivel IA**

Piensa primero cuántos útiles de cada tipo necesitarás para los 6 paquetes.

### **4.2. Pistas: Nivel IB**

Piensa que es lo peor que le podría pasar a Ana cuando saca las bolitas y quiere llegar a 50 de un mismo color.

Esto es un ejemplo del Principio de Palomar.

### **4.3. Pistas: Nivel IC**

El promedio de varios números se calcula dividiendo la suma de todos ellos entre la cantidad de números considerados.

### **4.4. Pistas: Nivel II**

Recuerda la fórmula del área del triángulo.

### **4.5. Pistas: Nivel III**

Luego de dar vuelta dos vasos cualesquiera en algún momento, ¿qué sucede con la cantidad de vasos *boca arriba*?



#### 4.6. Pistas: Nivel IV

Podrías pensarlo por varios caminos. Uno sería aplicar inducción, otro sería utilizar congruencia, lo importante es que busques un patrón.

#### 4.7. Pistas: Nivel V

Es fácil ver que para  $n = 1$  la igualdad se cumple. Teniendo esto en cuenta, una forma de resolver este problema sería suponer que esa fórmula es cierta para  $n = h$ , y ver si se cumple para  $n = h + 1$  (esto se conoce como método de inducción completa).