



Olimpiada Nacional de Matemática

Problemas Semanales

Semana 2 - Abril 2020

Índice

1. Problemas Semanales	2
2. Primaria	3
2.1. Nivel IA	3
2.2. Nivel IB	3
2.3. Nivel IC	3
3. Secundaria	4
3.1. Nivel II	4
3.2. Nivel III	4
3.3. Nivel IV	5
3.4. Nivel V	5
4. Pistas	6
4.1. Pistas: Nivel IA	6
4.2. Pistas: Nivel IB	6
4.3. Pistas: Nivel IC	6
4.4. Pistas: Nivel II	6
4.5. Pistas: Nivel III	6
4.6. Pistas: Nivel IV	6
4.7. Pistas: Nivel V	7

1. Problemas Semanales

Los problemas del presente archivo buscan servir de guía para practicar y entrenar a los alumnos que estén comenzando su trayecto en la resolución de problemas matemáticos.

Los niveles de la Olimpiada Nacional de Matemática son los siguientes:

- 1) Nivel IA - 4° de escuela
- 2) Nivel IB - 5° de escuela
- 3) Nivel IC - 6° de escuela
- 4) Nivel II - 1° de liceo
- 5) Nivel III - 2° y 3° de liceo
- 6) Nivel IV - 4° y 5° de liceo
- 7) Nivel V - 6° año de liceo

Te sugerimos que antes de resolver el problema de tú nivel, trabajes con el problema del nivel anterior (lo cual te servirá como repaso) y luego de tener la solución de tú nivel aceptes el desafío de intentar trabajar con el problema del nivel siguiente.

2. Primaria

2.1. Nivel IA

La fecha 6/6/2020 cumple dos condiciones:

- 1) tres dígitos, repetidos dos veces cada uno
- 2) seis dígitos que suman 16

¿Cuál es la siguiente fecha que cumple la primera condición ?

¿ Y cuál es la siguiente fecha que cumple la segunda condición?

2.2. Nivel IB

Sigue la secuencia de la figura y calcula la suma de los dos números que faltan.

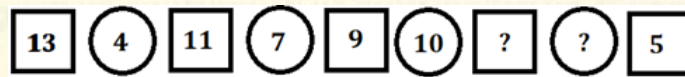


Figura 1: figura problema IB

2.3. Nivel IC

En el número 2451, el producto de sus cifras es $2 \times 4 \times 5 \times 1 = 40$.

¿Cuántos números enteros de cuatro cifras cumplen que el producto de sus cifras es 15?

¿Cuántos números enteros de cinco cifras cumplen que el producto de sus cifras es 15?

3. Secundaria

3.1. Nivel II

En la primera fase del mundial de fútbol cada uno de los grupos está formado por cuatro equipos.

Cada uno de los equipos juega contra los 3 restantes una sola vez, por lo que se juegan en total 6 partidos por grupo.

¿Cuántos partidos se jugarían por grupo si cada uno de ellos estuviera formado por 10 equipos?

3.2. Nivel III

En la figura 2, O es el centro de la circunferencia, BD es diámetro, las rectas CB y CA son tangentes y el ángulo $\angle ACB = 70^\circ$.

¿Cuál es la medida del ángulo $\angle AOD$?

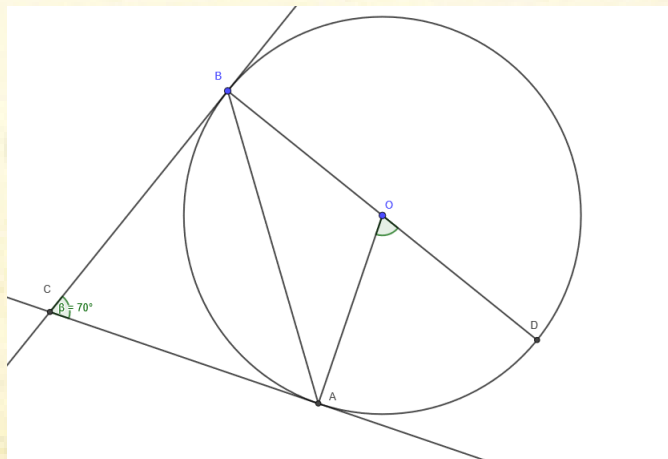


Figura 2: Problema Nivel III

3.3. Nivel IV

Prueba que la igualdad

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

se verifica para todo entero positivo n .

3.4. Nivel V

Prueba que la cantidad de factores 2 en el número $n!$ es menor a n .

Observación: Se define factorial de un número entero n positivo mayor 1 (y se indica $n!$) en la forma:

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n - 2) \times (n - 1) \times n$$

4. Pistas

4.1. Pistas: Nivel IA

Si encontramos una fecha que cumple en 2020 ponemos límites superior e inferior a la fecha.

4.2. Pistas: Nivel IB

Considere la secuencia generada por los números de los círculos y cuadrados por separados.

4.3. Pistas: Nivel IC

Considere la factorización prima de 15.

4.4. Pistas: Nivel II

Trate de ver cuántos partidos juega cada equipo, y no cuente el mismo partido dos veces.

4.5. Pistas: Nivel III

Las tangentes siempre son perpendiculares a la recta determinada por el punto de tangencia y el centro.

4.6. Pistas: Nivel IV

Intente probarlo por inducción.

4.7. Pistas: Nivel V

Recuerda que $n, n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$ tiene $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ múltiplos de k . También recuerda que los múltiplos de 2 que son múltiplos de 4 cuentan doble, y así para los múltiplos de 8, 16, 32, ...