Final Nacional
XXXVII Olimpíada Nacional de Matemática – 2022
Nivel V

Tiempo máximo: 4 horas
No se puede usar calculadora
No se pueden consultar libros ni apuntes

Montevideo, 23 de octubre de 2022.-

Problema 1.-
Se consideran 17 números enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que hay al menos una pareja de estos números cuyo producto es un cuadrado perfecto.

Problema 2.-
Demuestra que para todo $n \geq 2$ se puede encontrar una sucesión de números naturales $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ es un cuadrado perfecto.

Problema 3.-
Halla todas las ternas de reales a, b, c tales que:

$$(2^{2a}+1)(2^{2b}+2)(2^{2c}+8) = 2^{a+b+c+5}$$

Problema 4.-
ABC es un triángulo en el cual $AC \neq BC$.
O es el centro de la circunferencia Γ circunscripta al triángulo ABC.
La recta tangente a Γ trazada por C corta a la recta AB en M.
La recta perpendicular a OM trazada por M corta a las rectas BC y AC en los puntos P y Q, respectivamente.
Demuestra que los segmentos PM y MQ son iguales.

JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS

Colabora: UM UNIVERSIDAD DE MONTEVIDEO Declarado de interés por: Ministerio de Desarrollo Social | Instituto Nacional de la Juventud