Combinatoria

C1. Anita quiere cubrir un tablero cuadriculado de 13×13 con varias tiras de papel de 2×6, de tal modo que no quede ninguna casilla sin cubrir. ¿Cuántas tiras debe usar Anita como mínimo?

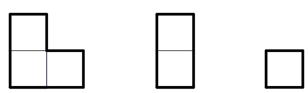
Aclaración: Las tiras se pueden superponer y rotar. Cada tira debe cubrir exactamente 12 casillas del tablero.

C2. Alrededor de una circunferencia están escritos 2012 números, cada uno de los cuales es igual a 1 ó -1. Si no hay 10 números consecutivos cuya suma sea 0, halle todos los valores que puede tomar la suma de los 2012 números.

C3. Sea n un entero positivo par. Un triángulo equilátero de lado n se divide mediante rectas paralelas a sus lados en n^2 triangulitos equiláteros de lado 1. Demuestre que si es posible cubrir el tablero sin huecos ni superposiciones con n fichas congruentes, cada una de las cuales cubre exactamente n triangulitos del tablero, entonces n es múltiplo de 4.

C4. Una *ficha de dominó* es un rectángulo de 1×2 o de 2×1. Diego juega a cubrir completamente un tablero de 6×6 usando 18 fichas de dominó. Determina el menor entero positivo k para el cual Diego puede colocar k fichas de dominó sobre el tablero (sin que se superpongan) tal que lo que queda del tablero se pueda cubrir de forma única usando las fichas de dominó restantes.

C5. A y B juegan alternadamente sobre un tablero de 2012×2013 con suficientes fichas de los siguientes tipos:



tipo 1 tipo 2 tipo 3

En su turno, A debe colocar una ficha del tipo 1 sobre casillas vacías del tablero. B, en su turno, debe colocar exactamente una ficha de cada tipo sobre casillas vacías del tablero. Pierde el jugador que ya no puede realizar su jugada. Si empieza A, decida quién tiene una estrategia ganadora.

Aclaración: Las fichas se pueden rotar pero no se pueden superponer, ni salir del tablero.

Geometría

G1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea P la intersección de las rectas BC y AD. La recta AC corta a la circunferencia circunscrita del triángulo BDP en S y T, con S entre A y C. La recta BD corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ACP en U y V, con U entre B y D. Demuestre que $PS = PT = PU = PV$.

G2. Dado un triángulo ABC, sean M y N puntos variables de los lados AB y AC, respectivamente, tales que ni M ni N coinciden con los vértices y, además, $AM \cdot MB = AN \cdot NC$. Pruebe que la mediatriz del segmento MN pasa por un punto fijo.

G3. Dado un triángulo ABC, sean M, N y P puntos de los lados AB, BC y CA, respectivamente, tales que $MBNP$ es un paralelogramo. La recta MN corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en los puntos R y S. Pruebe que la circunferencia circunscrita del triángulo RPS es tangente a AC.

G4. Sea P un punto del lado CD de un cuadrado $ABCD$. En el triángulo ABP se trazan las alturas AQ y BR, con Q en el segmento BP y R en el segmento AP. Sea S el punto de intersección de las rectas CQ y DR, demuestre que $\angle ASB = 90°$.

G5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean H_A, H_B y H_C los pies de las alturas relativas a los vértices A, B y C, respectivamente. Defina I_A, I_B y I_C como los incentros de los triángulos AH_BH_C, BH_CH_A y CH_AH_B, respectivamente. Sean T_A, T_B y T_C los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo ABC con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Pruebe que los triángulos $I_AI_BI_C$ y $T_AT_BT_C$ son congruentes.

G6. Dado un triángulo ABC, con $1 < \frac{AB}{AC} < \frac{3}{2}$. Sean M y N puntos variables de los lados AB y AC, respectivamente, tales que $\frac{MB}{AC} - \frac{NC}{AB} = 1$. Pruebe que la circunferencia circunscrita del triángulo AMN pasa por un punto fijo distinto de A.

Teoría de Números

N1. Encuentre el mayor entero positivo n, menor que 2012, que cumpla la siguiente propiedad:

Si p es un divisor primo de n, entonces $p^2 - 1$ es un divisor de n.

N2. Halle todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que m tiene dos dígitos, n tiene tres dígitos, $\dfrac{mn}{m+n}$ es un número primo y, además, m y n tienen el mismo dígito de las unidades.

N3. Demuestre que no existen enteros positivos a, b, c y d, coprimos dos a dos, tales que $ab + cd$, $ac + bd$ y $ad + bc$ son divisores impares del número

$$(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d).$$

N4. Pruebe que para cada entero impar $n > 1$ existen tres enteros positivos a, b, c, coprimos entre sí, tales que

$$a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 3^n.$$

N5. Halle todos los enteros $1 < n < 2012$, para los cuales se cumple que:

$$(p(n))^2 = \sigma(n) + 423,$$

donde $p(n)$ denota el producto de todos los números primos que son divisores de n, y $\sigma(n)$ denota la suma de todos los divisores positivos de n.

Álgebra

A1. Encuentre todos las parejas (a, b) de números reales tales que:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a + b - 4} = \sqrt{ab} + 2.$$

A2. Sean x, y números reales no nulos que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3.$$

Determine todos los valores que puede tomar la expresión $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.