XVIII CONCURSO
CANGURO MATEMÁTICO 2011

Nivel 4 (4º de E.S.O.)

Día 17 de marzo de 2011. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

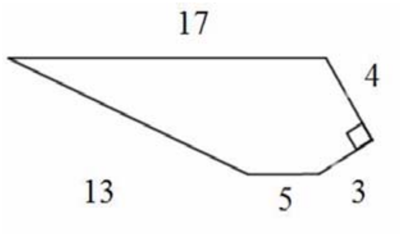
No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

1 ¿Cuál es el menor divisor de 2011, distinto de 1?

A) 3 B) 7 C) 11 D) 701 E) 2011

2 Observando el polígono de la figura ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?



A) Es un pentágono B) Tiene un ángulo agudo C) Dos lados son perpendiculares D) Tiene dos lados de la misma longitud E) el perímetro es 42

3 En una retícula, se dibuja un cuadrado ABCD de dimensión 10x10. Los vértices son puntos reticulares. Después se traza otro cuadrado EFGH, cuyos vértices están en los lados de ABCD, y de modo que sus vértices son también puntos reticulares. ¿Cuántos cuadrados EFGH de diferentes tamaños se pueden trazar así?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

4 Desde un punto P, interior a un triángulo equilátero, las distancias a sus tres vértices son:

PA = $\sqrt{3}$ cm, PB = $\sqrt{13}$ cm y PC = $\sqrt{13}$ cm La longitud del lado del triángulo es

A) 5 cm B) 6 cm C) 7 cm D) 8 cm E) 9 cm

5 En un examen, la puntuación media de 6 estudiantes es 68. Después de calificar el examen de un séptimo estudiante, ese promedio sube a 72. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por el séptimo estudiante?

A) 72 B) 76 C) 88 D) 96 E) 100

6 En una plaza hay 100 personas. 50 de ellas son de Italia, 60 son hombres y 90 son vegetarianas. ¿Cuántos hombres italianos y vegetarianos hay, como mínimo, en la plaza?

A) 0 B) 1 C) 10 D) 40 E) 50

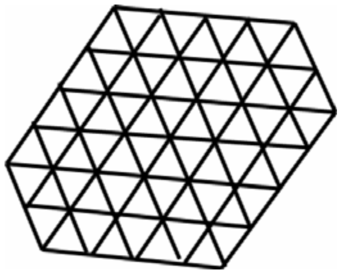
7 ¿Cuál de los siguientes números es menor?

A) los $\frac{2}{3}$ de 4 B) los $\frac{3}{4}$ de 5 C) los $\frac{4}{5}$ de 6 D) los $\frac{5}{6}$ de 7 E) los $\frac{6}{7}$ de 8

8 2011 es un año especial en el que la suma de las dos primeras cifras es igual que la suma de las dos últimas. ¿Cuántos años, desde el año 1000, han tenido esta propiedad?

A) 35 B) 49 C) 64 D) 81 E) 100

9 Uniendo vértices del retículo de la figura, ¿qué polígono, de los 5 propuestos, no se puede obtener?



A) Triángulo isósceles B) rectángulo C) rombo D) hexágono E) cuadrado

10 ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $255^2 - 1$?

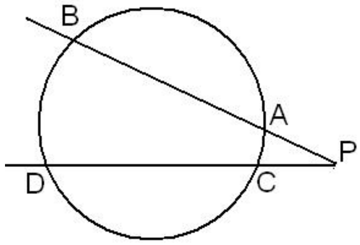
A) 2^1 B) 2^8 C) 2^9 D) 2^{127} E) 2^{254}

Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

11 Matías, el buscador de oro, sabe por su experiencia, que, después de cerner 10 toneladas de grava del arroyo Dorado, consigue 30 gramos de oro. ¿Cuántas toneladas habrá que cerner si quiere obtener 12 gramos de oro?

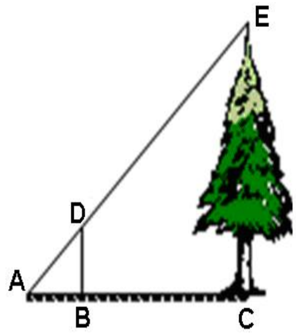
A) 2,5 B) 3 C) 4 D) 25 E) 40

12 PA · PB = 60, y $\frac{PC}{PD} = \frac{5}{48}$, ¿cuál es el valor de PC?



A) 5 B) 6 C) 4,5 D) 3 E) 2,5

13 Lali quiere calcular la altura del árbol de la figura. Para eso, determina el punto A donde la recta que une el vértice del poste con la copa del árbol toca el suelo. Descubre las siguientes relaciones: AB = BD ; $AD = 3\cdot\sqrt{2}$; $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$. ¿Cuál es la altura del árbol?



A) 9 m B) $9\cdot\sqrt{3}$ m C) $9\cdot\sqrt{2}$ m D) $12\cdot\sqrt{2}$ E) 12

14 La figura muestra dos cuartos de círculo de radio 1 dentro de un rectángulo que mide 2 x 1:
¿Cuánto mide el área coloreada?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{\pi}{2}$

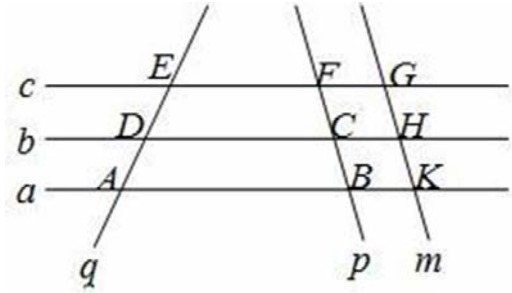
15 En cada ronda de un torneo de volleyball, los equipos compiten por parejas; el ganador pasa y el que pierde es eliminado (en el volleyball no hay empates). Si el número de equipos es impar, uno de ellos pasa directamente a la ronda siguiente. Se jugaron en total 100 partidos; ¿cuántos equipos comenzaron la competición?

A) 100 B) 101 C) 2^7 D) 2^6
E) No hay suficiente información para responder

16 Seis rectas se disponen como se indica en la figura:

$a||b, b||c, p||m$

¿Cuántos trapecios se forman?



A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

17 Un estudiante sabe solamente 5 de los 10 temas que entran en su examen, en el que se hacen tres preguntas, de tres temas elegidos al azar de entre los 10. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres preguntas correspondan a temas que el estudiante conoce?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ E) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

18 ¿Cuántas cifras tiene el número $10^{10} - 9^9 + 8^8 - 7^7 \pm \ldots - 1^1$?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

19 Sea DE un segmento de longitud 2. ¿Cuántos puntos distintos F del plano hay, de manera que el triángulo DEF sea rectángulo y tenga área 1?

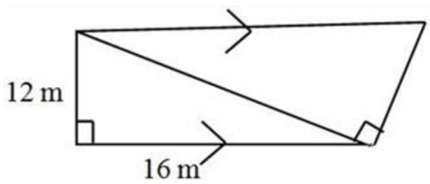
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) otra respuesta

20 ¿Cuántos de los números 11, 111, 1111, 111111 y 11111111 son primos?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21 Se forma un trapecio uniendo los dos triángulos rectángulos semejantes de la figura ¿Cuál es el área del trapecio?



A)120 B) 192 C) 240 D) 246 E) 296

22 Representamos por **mcd (x,y)** al máximo común divisor de x e y. ¿Cuántos pares (x,y) de números enteros positivos satisfacen la ecuación **mcd(x,y) + mcd (x+1, y + 1) = x – y**?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) infinitos

23 Matías ha calculado incorrectamente la superficie de un terreno a partir de un mapa a escala **1: n**. Él simplemente ha medido el área en el mapa y la ha multiplicado por n. Su colega calcula correctamente el área y encuentra que su resultado es un 125% mas que el de Matías. La escala del mapa es:

A) 1:1,25 B) 1:1,5 C) 1:2 D) 1:2,25 E) 1:5

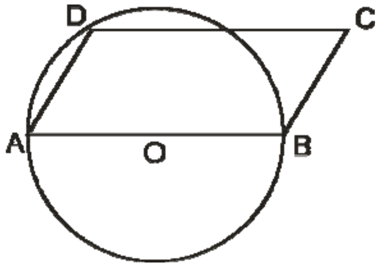
24 De las siguientes fracciones continuas, ¿cuál es la mayor? :

A) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}$ B) $\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+2}}}$ C) $\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+3}}}$ D) $\dfrac{4}{4+\dfrac{4}{4+\dfrac{4}{4+4}}}$ E) $\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5+5}}}$

25 Sea $f(x)=ax^2+bx+c,\quad a\neq 0$ tal que la ecuación $f(x)=0$ no tiene raíces reales. ¿Cuál es el máximo número posible de raíces reales de la ecuación $f(f(f(x)))+f(f(x))+f(x)=0$?

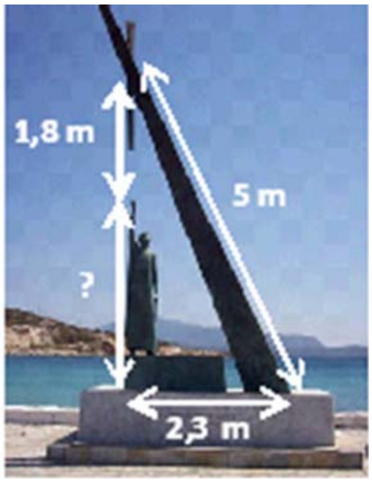
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

26 Los ángulos agudos del paralelogramo de la figura miden 60º. El radio del círculo AO = 3 cm. ¿Cuál es el área del paralelogramo?



A) $\frac{9\cdot\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$ E) $9\cdot\sqrt{3}$

27 ¿Cuál es en metros, aproximadamente, la altura de Pitágoras con su mano levantada sobre el pedestal?



A) 1,5 B) 2 C) 2,6 D) 3 E) 3,3

28 Para un entero $n\geq 2$, se designa mediante $\langle n\rangle$ el mayor número primo menor o igual que n.
¿Cuántos enteros positivos k verifican la ecuación $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 2k+3\rangle$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) más de 3

29 Dos números positivos, p y q, verifican la ecuación $p^2-2p+q^2-2q=15-2pq$.
Hallar el valor de p + q:

A) 1 B) 5 C) 9 D) 13 E) 17

30 El mínimo valor de $x^2+2xy+4y^2+2x+8y+7$ es:

A) 7 B) 5 C) 3 D) 2 E) otro valor