Com – Partida de Matemática del Uruguay
Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas
Centro Latinoamericano de Matemática e Informática – CLAMI

Instancia FINAL de la XXVI Olimpíada Nacional de Matemática 2011
Nivel V

Tiempo máximo: 4 horas
No se puede usar calculadora
No se pueden consultar libros ni apuntes

Piriápolis, 16 de octubre de 2011

PROBLEMA 1

Considera un arco AB de una circunferencia $\mathbb{C}$ y un punto P variable en dicho arco AB.

Sea D el punto medio del arco AP que no contiene a B.

Sea E el punto medio del arco BP que no contiene a A.

$\mathbb{C}_1$ es la circunferencia con centro D que pasa por A.

$\mathbb{C}_2$ es la circunferencia con centro E que pasa por B.

Demuestra que la recta que contiene los puntos de intersección de $\mathbb{C}_1$ y $\mathbb{C}_2$ pasa por un punto fijo.

PROBLEMA 2

Sea un punto O y un conjunto A de 15 puntos coplanares con O. Los puntos de A son tales que la distancia de cada uno de ellos a O es menor que 1, y que no hay dos de ellos que sean colineales con O.

Demuestra que existe al menos un triángulo con un vértice en O y los otros dos en puntos de A, cuya área es menor que $\frac{1}{4}$.

PROBLEMA 3

Halla todos los $n \in \mathbb{N} \,/\, 2^{2n} + 2^n + 1 = \dot{21}$.

PROBLEMA 4

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} - 0$ tal que:

$f(x+y)\,f(x-y) = [\,f(x)\,f(y)\,]^2$ y además $f(1) \neq 1$.

Demuestra que $\log_{f(1)} f(z)$ es un cuadrado perfecto para todo entero z.

JUSTIFICA TODAS TUS RESPUESTAS