Com – Partida de Matemática del Uruguay
Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas
Centro Latinoamericano de Matemática e Informática – CLAMI

Instancia FINAL de la XXVI Olimpíada Nacional de Matemática 2011
Nivel IV

Tiempo máximo: 4 horas
No se puede usar calculadora
No se pueden consultar libros ni apuntes

Piriápolis, 16 de octubre de 2011

PROBLEMA 1

Se sabe que la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales.
Sin embargo, Ana obtuvo las raíces – 1 y 4 porque se equivocó y cambió el signo del coeficiente a , dejando igual su valor absoluto.

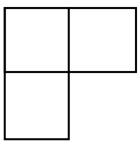
i) Demuestra que, en la ecuación original, efectivamente las raíces no son reales.
ii) Encuentra el valor de $\frac{2b+3c}{a}$.

PROBLEMA 2

ABC es un triángulo acutágulo. Sea *DEF* el triángulo que tiene por vértices los pies de las alturas del triángulo, con $D \in BC$ y $F \in AB$.
Se considera la recta r , paralela a *EF* por D .
r intersecta a *AC* en Q.
r intersecta a *EB* en *N*.
Demuestra que D es el punto medio del segmento QN .

PROBLEMA 3

Se considera un tablero de $2^n \times 2^n$ casillas, al que se le suprime una cualquiera de esas casillas. Contamos con fichas de la forma que se indica a continuación:



que se pueden colocar como en la figura o giradas, pero siempre cubriendo con cada una de ellas exactamente tres casillas del tablero, sin superponerse, sin dejar casillas sin cubrir (salvo, por supuesto, la que fue suprimida) y sin que quede ninguna parte de la pieza fuera del tablero.
Demuestra que, para $n \geq 1$, siempre se puede recubrir en forma completa el tablero.

PROBLEMA 4

Decimos que un número natural es *abundante* si la suma de sus divisores positivos supera al doble de ese número.
Encuentra un número abundante impar y demuestra que existen infinitos números abundantes impares.

JUSTIFICA TODAS TUS RESPUESTAS

http://www.compartida.org/ **e-mail: info@compartida.org**
Infórmate en nuestra web respecto a los Seminarios.
¡También puedes unirte a nuestro grupo de Facebook!