XXXIV Olimpíada Nacional de Matemática – 2020
Instancia Final - Nivel IV

Tiempo máximo: 2 horas
No se puede usar calculadora
No se pueden consultar libros ni apuntes

15 de noviembre de 2020.-

Problema 1

Para cada número natural positivo *n*, se define $f(n)$ como la cifra de las unidades del número

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \ .$$

Calcula la suma:

$$\sum_{n=1}^{2020} f(n)$$

Problema 2

En un pizarrón están escritos los números $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 2019^2, 2020^2$.
Patricia y Sergio borran alternadamente un número del pizarrón, hasta que sólo quedan dos números.
Si la diferencia entre esos dos números es múltiplo de 2021, gana Patricia; en caso contrario gana Sergio.
Si Sergio es el primero en jugar, ¿cuál de los jugadores tiene estrategia ganadora?

Nota: se dice que un jugador tiene estrategia ganadora si puede asegurar su victoria sin importar cómo juegue su rival.

Problema 3

La circunferencia inscrita en el triángulo *ABC* tiene centro *I* y es tangente a los lados *BC*, *CA* y *AB* en los puntos *X*, *Y*, *Z*, respectivamente.
Las rectas *BI* y *CI* cortan a la recta *YZ* en los puntos *P* y *Q*, respectivamente.
Demuestra que si los segmentos *XP* y *XQ* tienen la misma longitud, entonces el triángulo *ABC* es isósceles.

JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS