XXXV Olimpíada Nacional de Matemática – 2020
Instancia Final - Nivel III

Tiempo máximo: 2 horas
No se puede usar calculadora
No se pueden consultar libros ni apuntes

15 de noviembre de 2020.-

Problema 1

El factorial de un número entero positivo n (se representa $n!$) se define de la siguiente forma:

- si $n = 1$: $1! = 1$
- si $n \neq 1$: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

Ejemplos: $2! = 1 \times 2 = 2$
$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

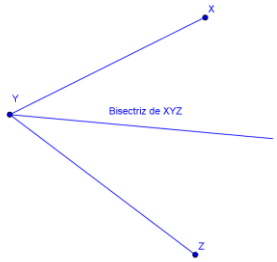
Determina todos los enteros positivos a, b, n tales que: $a! + b! = 2^n$.

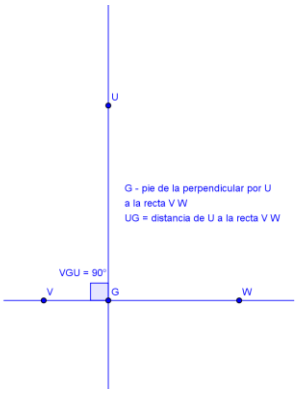
Problema 2

Se considera el triángulo ABC, con $AB = AC, \angle BAC = 48º$.
Se toma un punto D en el lado AC, tal que $\angle ABD = 54º$.
La bisectriz del ángulo $\angle BAC$ corta a la recta BD en el punto E.
Sea T un punto en la semirrecta AE, distinto de A, tal que la distancia de A al lado BC es igual a la distancia de T al lado BC .
Demuestra que los segmentos AB y ET son iguales.

Notas:

- La bisectriz de un ángulo es la semirrecta interior al ángulo, con origen en el vértice del mismo y que lo divide en dos ángulos de igual amplitud.
- La distancia de un punto a una recta es la medida del segmento que tiene por extremos el punto dado y el pie de la perpendicular desde ese punto a la recta.





Problema 3

n es un número natural de tres cifras.
m es el número que se obtiene escribiendo en orden inverso las cifras de n.
Ejemplos: si $n = 148$, entonces $m = 841$; si $n = 433$, entonces $m = 334$. Si $n = 100$, entonces $m = 001$.
Consideramos todos los números n entre 100 y 999 inclusive.
Para cada número n, escribimos el correspondiente número m y calculamos la diferencia $n - m$.
Por último, hallamos la suma de todas las diferencias obtenidas.
¿Cuál es el valor de esa suma?

JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS